

УДК 621.311.1.019

Антонов В.И., Наумов В.А., Иванов Н.Г., Солдатов А.В.

МЕТОДЫ НАСТРОЙКИ АДАПТИВНЫХ СТРУКТУРНЫХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛОВ АВАРИЙНЫХ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

Аннотация: Ключевая идея структурного анализа заключается в аппроксимации сигнала электрической сети совокупностью собственных мод эквивалентной линейной системы (модели). Сходство модели с сигналом аварийного режима обеспечивается инерционностью процессов регулирования в электрической сети, благодаря чему в начале режима короткого замыкания сеть проявляет себя как линейная инвариантная во времени система. Поэтому реакция электрической сети на короткое замыкание представляет собой линейную комбинацию собственных мод, размер базиса которых определяется порядком ее характеристического уравнения.

Поскольку актуальные характеристические параметры электрической системы недоступны для наблюдения, то задача распознавания сигнала переходного процесса обретает все признаки обратной задачи — задачи определения составляющих сигнала по измеренной выборке отсчетов в условиях ее структурной неопределенности. Поэтому структурный анализ использует адаптивные модели и методы их настройки, способные разрешить эту неопределенность.

В статье рассматриваются различные методы настройки адаптивных моделей сигнала в условиях структурной неопределенности, отягощенной присутствием шума в распознаваемом сигнале. Показано, что винеровская оценка параметров модели (классический метод наименьших квадратов) принципиально возможна только при наличии шума, иначе она вырождается. Проблемы винеровской оценки разрешают обычно с помощью сингулярного разложения траекторной матрицы переопределенной системы уравнений, формируя оценки с минимальной нормой на основе анализа сингулярных чисел. В системах релейной защиты, когда распознавание сигнала идет в масштабе реального времени, лучшим — с точки зрения затрат вычислительных ресурсов — является метод наложения моделей, возможности которого близки к методу с минимальной нормой. Для настройки структурных моделей сигналов с высоким содержанием шумов предпочтительнее методы, использующие расширенную матрицу. Эти методы объединены под названием методов общей задачи наименьших квадратов.

Ключевые слова: адаптивный структурный анализ, структурная модель, метод наименьших квадратов, сингулярное разложение, решение минимальной нормы, общая задача метода наименьших квадратов, метод наложения моделей, электрическая сеть, цифровая обработка сигналов.

Antonov V.I., Naumov V.A., Ivanov N.G., Soldatov A.V.

A TUNING METHODS OF ADAPTIVE STRUCTURAL MODELS OF ELECTRICAL POWER SYSTEM TRANSIENT SIGNALS

Abstract: A key concept of structural analysis is approximation of electrical network signal by eigenmodes combination of equivalent linear system (model). The model matches signal due to slow changing of power system structure during fault witch provide to consider it as linear time-invariant system. Hence, fault signals of electrical network consist of eigenmodes linear determined by network characteristic equation. Actual network characteristic parameters are unavailable for observation, so fault signal recognition is inverse problem namely signal components identification in sample frame under structural uncertainty. Therefore, adaptive structural models and tuning methods compatible with structural uncertainty are used. Adaptive structural model tuning methods for recognition of structural uncertain and noised signals are studied. It's shown that wiener estimation of structural model parameters can be used only with noised signal, otherwise it degenerates. Minimum norm solution based on singular values analysis is used to overcome this problem. Model superposition method is the best method in terms of computing resources using while its ability are close to minimum norm solution. Augmented matrix based methods (total least squares methods) are preferable for heavy noised signal recognition.

Keywords: adaptive structural analysis, structural model, least square method, singular value decomposition, minimum norm solution, total least squares method, model superposition method, electrical network, digital signal processing.

1. Введение

Процессы управления режимом электрической системы относительно продолжительны, и в начальной стадии аварии структура системы остается практически неизменной. Поэтому не будет сильным упрощением полагать, что электрическая система представляет собой линейную систему с постоянными параметрами, и слагаемые сигнала аварийного процесса полностью определяются корнями ее характеристического уравнения [1, 2]. Это теоретическое положение, весьма важное с точки зрения выбора класса моделей, используемых при определении структуры сигнала, к сожалению, не придает определенности задаче распознавания. Существующая структурная неопределенность сигнала аварийного процесса, заключающаяся, главным образом, в неизвестности размерности задачи (модели) и неопределенности вида слагаемых процесса, требует использования специальных методов распозна-

вания сигналов, способных работать в условиях априорной неопределенности задачи [3, 4]. Одним из таких методов является адаптивный структурный анализ.

2. Постановка задачи

Инструментом распознавания структуры сигнала в адаптивном структурном анализе является цифровая структурная модель [4]

$$a_0 \hat{x}(k) = - \sum_{m=1}^M a_m x(k - mv), \quad k \geq Mv, \quad (1)$$

где $a_0 \hat{x}(k)$ – взвешенная с коэффициентом a_0 оценка текущего отсчета сигнала $x(k)$, a_m – искомые коэффициенты модели, v – коэффициент внутримодельной децимации отсчетов сигнала ($v=1$, если нет децимации), M – порядок структурной модели. Коэффициент a_0 выбирается произвольным, обычно $a_0 = 1$.

По коэффициентам a_m структурной модели (1) формируется характеристический полином

$$P_M(\underline{\zeta}) = \sum_{m=0}^M a_m \underline{\zeta}^{-m},$$

решая который определяются частоты ω_i и коэффициенты затухания α_i составляемых сигнала

$$(\alpha_i \pm j\omega_i) v T_s = \ln \underline{\zeta}_i.$$

Здесь T_s – интервал дискретизации сигнала $x(k)$.

Правильному определению коэффициентов a_m структурной модели (1), и, как следствие, правильному определению компонентного состава сигнала мешает наличие в сигнале шумов и его структурная неопределенность. Настоящая статья посвящена исследованию методов, обеспечивающих эффективное распознавание сигнала аварийного процесса в таких условиях.

3. Классическое решение задачи МНК при настройке моделей (винеровские оценки)

В терминах матричной алгебры модель (1) может быть представлена как

$$a_0 \hat{x}(k) = -\mathbf{a}^T \mathbf{x}(k-1), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{a} = [a_M, a_{M-1}, \dots, a_1]^T \quad (3)$$

и

$$\mathbf{x}(k-1) = [x(k-M), x(k-M+1), \dots, x(k-1)]^T \quad (4)$$

$(M \times 1)$ – векторы параметров модели и наблюдаемых отсчетов сигнала соответственно. Как уже отмечалось ранее, коэффициент a_0 произволен. Поэтому в дальнейшем, если не указано иное, $a_0 = 1$.

Вектор коэффициентов (3) обычно ищут как решение системы уравнений

$$\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (5)$$

полученной в предположении, что модель хорошо описывает сигнал и отсчеты сигнала и модели равны друг другу: $a_0 x(k) - a_0 \hat{x}(k) = 0$, $k \geq M + L$, где L – число уравнений. Траекторная матрица [5] \mathbf{X} и вектор наблюдений \mathbf{b} определяются с помощью вектора отсчетов сигнала (4) следующим образом:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k-L) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(k-1) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{L \times M} \quad (6)$$

и

$$\mathbf{b} = \mathbf{x}(k). \quad (7)$$

В идеальном случае, когда сигнал $x(k)$ является результатом вычислительного эксперимента, шум в сигнале представлен лишь ошибкой вычислений и незначителен, в связи с чем он не оказывает существенного влияния на оценку текущего отсчета (2). Отношение сигнал/шум значительно, и вектор коэффициентов (3) может быть определен просто как решение системы уравнений (5)

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{b}, \quad (8)$$

полагая, что число уравнений $L = M$ и матрица \mathbf{X} квадратная невырожденная [6].

Для сигнала реального процесса шум имеет существенную величину с точки зрения влияния на оценку отсчета, и природа ее возникновения связана в основном с шумами тракта доставки сигнала до цифровой защиты и преобразования непрерывного сигнала в цифровой. Шум ухудшает разре-

шающую способность модели (2) и приводит к повышению ее порядка M . В связи с этим всегда подразумевается, что порядок модели M выше порядка M_s сигнала текущего режима.

Рассчитывать, что при наличии в сигнале шума система (5) совместна и ее решение единственно, нет достаточных оснований, поскольку шум произволен и не может быть учтен моделью (2). Поэтому уравнение (5) не имеет точного решения и должно быть записано как приближенное равенство

$$\mathbf{X}\mathbf{a} \approx \mathbf{b}. \quad (9)$$

Решение системы (9) уже не может быть единственным, и речь может идти только об отыскании оптимального решения $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$, доставляющего лучшее усредненное приближение модели к сигналу.

Ясно, что вектор $\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ лежит в пространстве столбцов $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ траекторной матрицы, поскольку является комбинацией столбцов с компонентами вектора $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ в качестве весов. Это хорошо видно, если в траекторной матрице \mathbf{X} выделить столбцы \mathbf{x}_j ($j = \overline{1, M}$) и переписать уравнение (9) следующим образом:

$$\mathbf{x}_1\hat{a}_M + \mathbf{x}_2\hat{a}_{M-1} + \dots + \mathbf{x}_M\hat{a}_1 = \mathbf{b}_0,$$

где \mathbf{b}_0 – вектор наблюдения, «очищенный» от шума.

Поэтому оптимальный вектор $\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ должен занимать такое положение в пространстве столбцов $\mathbf{R}(\mathbf{X})$, чтобы его конец был соединен с точкой, наиболее близкой к концу вектора правой части \mathbf{b} . Другими словами, решение системы (9) должно минимизировать расстояние от вектора правой части \mathbf{b} до пространства столбцов $\mathbf{R}(\mathbf{X})$. Геометрически это означает, что нужно восстановить перпендикуляр от конца вектора правой части \mathbf{b} до пространства столбцов $\mathbf{R}(\mathbf{X})$. В терминах матричной алгебры эта задача формулируется как задача минимизации квадратичной нормы

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^M} \|\mathbf{X}\mathbf{a} - \mathbf{b}_2\|, \quad (10)$$

минимальное значение которой представляет собой длину ортогонального вектора $\mathbf{b} - \mathbf{X}\mathbf{a}$ и равно Евклидовой норме вектора невязок системы уравнений (9).

Таким образом, мы приходим к следующей формулировке решения задачи классического метода наименьших квадратов в матричной форме:

Решение несовместной системы уравнений (9) представляет собой вектор $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$, минимизирующий длину вектора $\mathbf{b} - \mathbf{X}\mathbf{a}$.

Геометрическая интерпретация этого решения дана на рис. 1.

Прежде чем дать правило нахождения оценки $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$, сделаем важную ремарку.

При формулировании задачи МНК мы исходили из предположения, что траекторная матрица \mathbf{X} задана точно, без ошибок. Эта фундаментальная для классической задачи МНК предпосылка следует непосредственно из свойства модели (2), заключающегося в том, что оценка отсчета $\hat{x}(k)$ формируется на основе вектора предшествующих отсчетов (4). Поэтому полагается, что система (9) несовместима лишь из-за ошибок $\Delta \mathbf{b} = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_L]^T$ в векторе наблюдений

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \Delta \mathbf{b}, \quad (11)$$

где $\Delta b_i, i = 1, \dots, L$ – случайные ошибки. Вектор \mathbf{b}_0 связан с вектором решения $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ уравнением

$$\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}_{LS} = \mathbf{b}_0. \quad (12)$$

Гаусс в своей работе [7] показал, что если ошибки Δb_i не коррелированы и среднее элементов вектора ошибок $\Delta \mathbf{b}$ равно нулю, а траекторная матрица

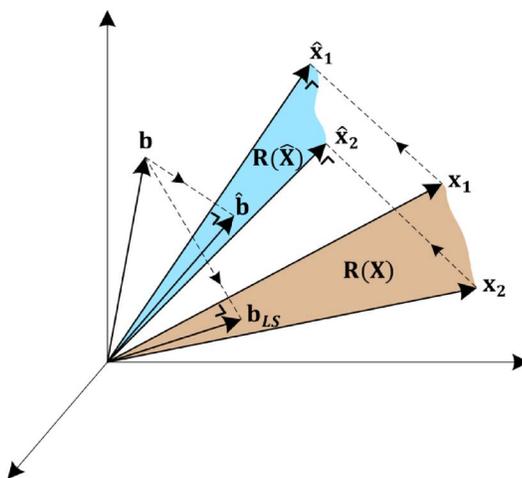


Рис. 1. Различие между решениями задачи наименьших квадратов. Классическое решение $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ минимизирует расстояние от вектора наблюдения \mathbf{b} до подпространства $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ столбцов траекторной матрицы \mathbf{X} и удовлетворяет систему $\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}_{LS} = \mathbf{b}_{LS}$. Общее решение (TLS-решение) получается путем аппроксимации столбцов траекторной матрицы \mathbf{X} и вектора наблюдения \mathbf{b} столбцами \hat{x}_i и вектором $\hat{\mathbf{b}}$, так же лежащим в подпространстве $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{X}})$, формируемом столбцами \hat{x}_i и удовлетворяет систему $\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{a}}_{TLS} = \hat{\mathbf{b}}$

\mathbf{X} имеет ранг M , то решение $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ будет иметь наименьшую дисперсию в классе несмещенных оценок, представляющих линейную функцию от вектора \mathbf{b} .

Важно, что это свойство оценок по МНК не зависит от формы распределения ошибок Δb_i .

Теперь можно сформулировать правило определения оценки $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$, являющейся единственным решением переопределенной системы уравнений (9) [6]:

Решение по методу наименьших квадратов для несовместной системы $\mathbf{X}\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$, состоящей из L уравнений с M неизвестными, удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}}_{LS} = \mathbf{X}^T \mathbf{b}. \quad (13)$$

Соотношение известно под названием нормальных уравнений в матричной форме. Если столбцы матрицы являются линейно независимыми, т.е. $\text{rank}(\mathbf{X}) = M$, то ковариационная матрица $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ обратима, и единственное решение дается правилом

$$\hat{\mathbf{a}}_{LS} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{b}. \quad (14)$$

Уравнение (13) известно еще и как уравнение Винера-Хопфа [8, 9].

4. Разрешение структурной неопределенности с помощью сингулярного разложения

В классической теории цифрового спектрального анализа [10] и анализа временных рядов [5] сингулярное разложение (Singular Value Decomposition – SVD) используется как устойчивый метод оценки спектральных характеристик сигнала при неполном ранге траекторной матрицы \mathbf{X} . Возможность применения SVD в практике релейной защиты применительно к задаче оценивания основной гармоники тока короткого замыкания впервые была показана в работе [11]. В зарубежной литературе по релейной защите использование SVD известно в задачах построений неадаптивных моделей сигнала [12, 13], а также в анализе сигналов различных режимов электроэнергетической системы [14, 15].

4.1 Сингулярное разложение и численный ранг траекторной матрицы

Как уже отмечалось, в случае дефекта ранга траекторной матрицы \mathbf{X} решение (14), минимизирующее норму (10), вырождается. В терминах линейной алгебры это означает, что система (9) имеет бесконечное множество решений $\hat{\mathbf{a}}$.

Действительно, во множестве случаев структурного анализа сигналов аварийных процессов электрической системы определитель

$$\Delta = \det[\mathbf{X}^T \mathbf{X}] \quad (15)$$

в решении (14) относительно мал, и даже незначительный шум в сигнале и ошибки округлений приводят к существенным флуктуациям в решении [16]. Особенно это характерно для приложений с высокой частотой дискретизации входных сигналов. В то же время, вычислить оценку (14) при дефекте ранга траекторной матрицы невозможно, поскольку определитель (15) просто равен нулю.

Поэтому для практических приложений важны методы настройки моделей, обладающие стабильностью к возмущениям в измерениях и способные решить задачу определения численного ранга траекторной матрицы \mathbf{X} в ходе настройки. Под численным рангом здесь подразумевается число $r < M$, такое, что оно является рангом меньшей матрицы, аппроксимирующей с требуемой точностью исходную траекторную матрицу. Возможность вычисления такой матрицы, являющейся наилучшим в смысле наименьших квадратов приближением анализируемой траекторной матрицы [17], следует из теоремы Экарта-Янга-Мирского [18, 19]. В определении такой аппроксимирующей матрицы важную роль играет сингулярное разложение.

Сингулярное разложение траекторной матрицы \mathbf{X} определяется следующим образом [20]:

Если матрица \mathbf{X} вещественная ($L \times M$) – матрица, то существуют ортогональные вещественные матрицы $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_L] \in \mathbf{R}^{L \times L}$ и $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M] \in \mathbf{R}^{M \times M}$, такие, что

$$\mathbf{U}^T \mathbf{X} \mathbf{V} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbf{R}^{L \times M}, \quad p = \min(L, M), \quad (16)$$

где $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$.

Векторы \mathbf{u}_i и \mathbf{v}_i называются левыми и правыми сингулярными векторами, а матрица

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbf{R}^{L \times M} \text{ –} \quad (17)$$

матрицей сингулярных чисел σ_i . Сингулярные числа всегда располагаются в порядке невозрастания.

Известно и другое определение сингулярного разложения [21]:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T. \quad (18)$$

Сингулярное разложение предоставляет больше информации при оценке численного ранга матрицы. Если существует дефицит ранга траекторной матрицы \mathbf{X} , т.е. его ранг $\text{rank}(\mathbf{X}) = r < M$, то из (16) следует, что $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_p = 0$. С точки зрения структурного анализа это означает, что в случае «чистого» сигнала (сигнала без шума) ранг траекторной матрицы будет равен порядку сигнала M_s , т.е. $r = M_s$. Если сигнал содержит шум, то определение порядка сигнала M_s усложняется, но анализ сингулярных чисел позволяет сделать более обоснованные выводы о порядке эффективного ядра модели сигнала.

Такие возможности сингулярного разложения следуют непосредственно из теоремы Экарта-Юнга-Мирского [18, 19]:

Пусть сингулярное разложение матрицы $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{L \times M}$ задано как в (16). Если $q < r = \text{rank}(\mathbf{X})$ и

$$\mathbf{X}_q = \sum_{i=1}^q \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad (19)$$

то

$$\min_{\text{rank}(\mathbf{B})=q} \|\mathbf{X} - \mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_q\|_2 = \sigma_{q+1}. \quad (20)$$

Следовательно, наименьшее сингулярное число траекторной матрицы \mathbf{X} равняется измеренному в Евклидовой норме расстоянию до множества всех матриц неполного ранга. И поэтому, пользуясь понятием ε – ранга матрицы [20]

$$\text{rank}(\mathbf{X}, \varepsilon) = \min_{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon} \text{rank}(\mathbf{X}_\varepsilon), \quad (21)$$

определяющего, что квадратичное расстояние от траекторной матрицы до аппроксимирующей матрицы \mathbf{X}_ε не больше заданного порога ε , можно разделить сингулярные числа на два подмножества:

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r_\varepsilon} \geq \varepsilon \geq \sigma_{r_\varepsilon+1} \geq \dots \geq \sigma_p, \quad p = \min\{L, M\}. \quad (22)$$

Другими словами, анализируя сингулярные числа можно определить степень близости аппроксимирующей матрицы \mathbf{X}_ε к траекторной матрице \mathbf{X} , т.е. определить численный ранг траекторной матрицы как номер r_ε сингулярного числа, превышающего заданный порог $\varepsilon > 0$.

Используя понятие численного ранга траекторной матрицы \mathbf{X} , можно сформулировать решение задачи построения структурной модели с минимальной нормой.

4.2 Модели с минимальной нормой

Сингулярное разложение позволяет находить эффективную модель среди бесконечного количества решений по МНК, выбирая ее по критерию минимума двоичной нормы вектора коэффициентов $\hat{\mathbf{a}}_{MN}$. Это следует из следующей теоремы [20, Теорема 5.5.1]:

Пусть матрица задана как в (16), причем $r = \text{rank}(\mathbf{X})$, тогда решение

$$\hat{\mathbf{a}}_{MN} = \sum_{i=1}^r \sigma_i^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{b} \quad (23)$$

доставляет минимум норме $\|\mathbf{X}\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_2$ и имеет наименьшую Евклидовую норму среди всех таких \mathbf{a} .

Используя определение псевдоинверсной матрицы

$$\mathbf{X}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+\mathbf{U}^T \in \mathbf{R}^{L \times M}, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{\Sigma}^+ = \text{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{L \times M}, \quad (25)$$

решение (23) можно записать как

$$\hat{\mathbf{a}}_{MN} = \mathbf{X}^+ \mathbf{b}. \quad (26)$$

Для вычисления псевдоинверсной матрицы \mathbf{X}^+ нужно знать ранг траекторной матрицы \mathbf{X} .

В практических приложениях часто решение (26) ищут следующим способом, не требующим вычисления псевдоинверсной матрицы \mathbf{X}^+ [22, 23].

Уравнение (9) записывают с учетом (18) как

$$\mathbf{\Sigma}\mathbf{q} = \mathbf{z} \in \mathbf{R}^M, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{a}}_{MN} \in \mathbf{R}^M \quad (28)$$

и

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}^T \mathbf{b}. \quad (29)$$

Здесь учтено известное свойство ортогональных матриц $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \in \mathbf{R}^{M \times M}$ (\mathbf{I} – единичная матрица).

Если сигнал без шума, то, чтобы решение было единственным и наименьшей длины (структурная модель – эффективной), элементы вектора \mathbf{q} должны определяться, как это следует из (25) и (27), по следующим правилам:

$$\begin{cases} q_i = z_i / \sigma_i, \text{ если } \sigma_i \neq 0; \\ q_i = 0, \text{ если } \sigma_i = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Минимальность длины вектора $\hat{\mathbf{a}}_{MN}$ в этом случае достигается путем отсека бесчисленного множества решений, связанного с нулевыми сингулярными числами, пользуясь вторым условием правил (30).

В случае сигнала с шумом правило (30) должно быть изменено с учетом особенностей определения численного ранга (ε -ранга) траекторной матрицы согласно условию (22):

$$\begin{cases} q_i = z_i / \sigma_i, \text{ если } \sigma_i \geq \varepsilon; \\ q_i = 0, \text{ если } \sigma_i < \varepsilon, \end{cases} \quad (31)$$

где $\varepsilon > 0$ – порог доверия к получаемому решению (порог для определения численного ранга r'_ε).

Оценка вектора коэффициентов эффективной модели в обоих случаях получают в результате обратного преобразования равенства (28) с учетом свойства ортогональности левой матрицы $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I} \in \mathbf{R}^{M \times M}$ (\mathbf{I} – единичная матрица)

$$\hat{\mathbf{a}}_{MN} = \mathbf{V}\mathbf{q}. \quad (32)$$

В задаче определения частот синусоидальных слагаемых сигнала метод с минимальной нормой впервые был использован в работе [17], в связи с чем в англоязычной литературе по цифровой обработке сигналов этот метод часто называют методом Тафтса–Кумаресана.

5. Разрешение структурной неопределенности в общей задаче наименьших квадратов

5.1 Введение в общую задачу наименьших квадратов

Классическое решение задачи метода наименьших квадратов (14) и решение с минимальной нормой основаны на постулате (12), предполагающем, что траекторная матрица \mathbf{X} в системе (9) определена точно, и все ошибки сосредоточены в векторе наблюдения \mathbf{b} . И, следуя именно этой гипотезе, вектор параметров структурной модели определяется в результате решения уравнения

$$\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}}_{LS} = \mathbf{b}_{LS},$$

вектор \mathbf{b}_{LS} правой части которого является проекцией вектора наблюдения \mathbf{b} на подпространство столбцов $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ «идеальной» траекторной матрицы \mathbf{X} (рис. 1).

В практических приложениях траекторная матрица (6) формируется на основе тех же отсчетов сигнала, что и вектор наблюдения (7), и оказывается, что они оба несвободны от ошибок измерения и шума. Очевидно, что рассчитывать в этом случае на «правильное» решение не приходится.

Закономерен вопрос, можно ли получить оценку структурной модели, учитывающей ошибки как в траекторной матрице, так и в векторе наблюдения. Или, иначе говоря, можно ли найти оценку $\hat{\mathbf{a}}_{TLS}$ для решения системы (9), такую, что она будет приближаться к решению системы

$$\mathbf{X}_0\mathbf{a} = \mathbf{b}_0 \quad (33)$$

с «правильными» измерениями \mathbf{X}_0 и \mathbf{b}_0 , связанными с данными эксперимента как

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} \quad (34)$$

и

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \Delta\mathbf{b}, \quad (35)$$

где $\Delta\mathbf{X}$ и $\Delta\mathbf{b}$ представляют собой ошибки измерений.

Ответ на поставленный вопрос будет утвердительным [21], если предположить, что «идеальная» траекторная матрица \mathbf{X}_0 имеет полный ранг и все столбцы матрицы $[\Delta\mathbf{X}; \Delta\mathbf{b}] \in \mathbf{R}^{L \times (M+1)}$ в однородном уравнении

$$[\mathbf{X}; \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T; -1 \end{bmatrix}^T = ([\mathbf{X}_0; \mathbf{b}_0] + [\Delta\mathbf{X}; \Delta\mathbf{b}]) \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T; -1 \end{bmatrix} = 0,$$

полученном из (9) с учетом определений (34) и (35), независимы и имеют одинаковое распределение с нулевым средним и ковариационную матрицу $\sigma_x^2 \mathbf{I}$. Последнее означает, что составляющие ΔX_{ij} и Δb_i матрицы $[\Delta\mathbf{X}; \Delta\mathbf{b}]$ являются некоррелированными случайными величинами с одинаковой дисперсией σ_x^2 . В этом случае решение $\hat{\mathbf{a}}_{TLS}$ системы (9) в смысле общей задачи наименьших квадратов состоятельно, т.е. оценка $\hat{\mathbf{a}}_{TLS}$ будет сходиться к «правильному» решению $\mathbf{a}_0 = \mathbf{X}_0^+ \mathbf{b}_0$ при $L \rightarrow \infty$ (\mathbf{X}_0^+ – псевдоинверсная матрица). Это решение в англоязычной литературе получило название TLS-решения (Total Least

Squares Solution). Свойства TLS-решения не зависят от формы распределения ошибок элементов траекторной матрицы \mathbf{X} и вектора наблюдения \mathbf{b} [21].

5.2 Базовое решение общей задачи наименьших квадратов

Базовое решение общей задачи наименьших квадратов формулируется как решение однородной системы

$$[\mathbf{X}; \mathbf{b}] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \\ -1 \end{bmatrix}^T \approx 0, \quad (36)$$

вытекающей из системы (9), и звучит следующим образом [21]:

TLS-решение $\hat{\mathbf{a}}_{TLS}$ системы (36) существует, если достигается минимум нормы по Фробениусу

$$\min_{[\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}] \in \mathbf{R}^{L \times (M+1)}} \left\| [\mathbf{X}; \mathbf{b}] - [\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}] \right\|_F \quad (37)$$

при условии, что $\hat{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}(\hat{\mathbf{X}})$, т.е. вектор $\hat{\mathbf{b}}$ принадлежит пространству столбцов матрицы $\hat{\mathbf{X}}$.

Вспомним, что матричная норма по Фробениусу для $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{L \times M}$ определяется как

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M x_{ij}^2},$$

где x_{ij} – элемент матрицы \mathbf{X} , расположенный на пересечении i -ой строки и j -го столбца. В терминах сингулярного разложения

$$\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_p^2}, \quad p = \min\{L, M\}.$$

Если минимизирующая матрица $[\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}]$ найдена, то решение $\hat{\mathbf{a}}_{TLS}$, удовлетворяющая уравнению

$$\hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{a}}_{TLS} = \hat{\mathbf{b}}, \quad (38)$$

называется TLS-решением.

Решение общей задачи наименьших квадратов удобно формулировать с помощью сингулярного разложения, представляя расширенную матрицу как

$$[\mathbf{X}; \mathbf{b}] = \mathbf{U}' \boldsymbol{\Sigma}' \mathbf{V}'^T \in \mathbf{R}^{L \times (M+1)} \quad (39)$$

или

$$\mathbf{U}'^T [\mathbf{X}; \mathbf{b}] \mathbf{V}' = \text{diag}(\sigma'_1, \dots, \sigma'_{M+1}) \in \mathbf{R}^{L \times (M+1)}. \quad (40)$$

Тогда условия уникальности и существования TLS-решения системы (9) даются следующей теоремой [21, Теорема 2.6]:

Пусть (16) и (40) есть сингулярные разложения траекторной \mathbf{X} и расширенной $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ матриц соответственно. Если $\sigma_M > \sigma'_{M+1}$, то расширенная матрица

$$[\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}] = \mathbf{U}' \hat{\Sigma}' \mathbf{V}'^T \quad (41)$$

и ее сингулярная матрица

$$\hat{\Sigma}' = \text{diag}(\sigma'_1, \dots, \sigma'_M, 0) \quad (42)$$

дают решение общей задачи наименьших квадратов (37) (TLS-решение), и это решение

$$\hat{\mathbf{a}}_{TLS} = -[\mathbf{v}'_{1,M+1}, \dots, \mathbf{v}'_{M,M+1}]^T / \mathbf{v}'_{M+1,M+1} \quad (43)$$

существует и является уникальным решением системы (38).

Здесь σ_M и σ'_{M+1} – самые младшие по величине сингулярные числа матриц \mathbf{X} и $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ соответственно.

Важно [21, Следствие 3.4], что из условия $\sigma_M > \sigma'_{M+1}$ следуют условия

$$\sigma_M > \sigma'_{M+1} \text{ и } \mathbf{v}'_{M+1,M+1} \neq 0.$$

Это означает, что [21, Теорема 2.6] формулирует основной алгоритм вычисления базового TLS-решения системы (9):

Шаг 1. Получить сингулярное разложение расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ (40).

Шаг 2. Если $\mathbf{v}'_{M+1,M+1} \neq 0$, то TLS-решение существует и равно (43).

Как видим, базовое решение TLS-задачи возможно, если $\sigma'_{M+1} \neq 0$. Поскольку в этом случае ранг расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ будет равен $M + 1$, то система (36) несовместна. Проблема несовместности решается с помощью теоремы Экарта-Юнга-Мирского (20), понижая ранг расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ на единицу. В результате получают лучшую с точки зрения дисперсии аппроксимацию $[\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}]$ расширенной матрицы (41), при которой справедливо равенство

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_{TLS}^T; -1 \end{bmatrix}^T = 0.$$

Само TLS-решение определяют по формуле (43).

Несложно видеть, что если $\sigma'_{M+1} = 0$, вектор правой части системы (9) $\mathbf{b} \in \mathbf{R}(\mathbf{X})$ и система имеет точное решение (8), в связи с чем необходимости в TLS-решении нет.

5. 3 TLS-решение с минимальной нормой

С точки зрения общей теории структурных моделей, повышение их разрешающей способности обеспечивается, главным образом, наращиванием ресурсов фильтра шума. Поэтому порядок структурной модели M всегда намного превосходит совокупный порядок M_s полезных слагаемых распознаваемого сигнала электрической системы. В идеальном случае, когда сигнал свободен от шума, ранг расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ равен M_s , и между составляющими сигнала и сингулярными числами в (40) существует строгое соответствие, в связи с чем все сингулярные числа с номерами $p > M_s$ будут равны нулю. Поэтому TLS-решение приводится к решению задачи МНК с минимальной нормой (раздел 4.2).

Но при распознавании сигнала реального процесса ранг расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ полон, и матрица сингулярных чисел не содержит нулевых элементов. Интуитивно ясно, что доминирующие сингулярные числа формируют подмножество, ассоциированное с полезными составляющими сигнала, а малые числа – подмножество, так или иначе связанное с шумом. Существование этой связи между составляющими сигнала и соответствующими подмножествами сингулярных чисел можно использовать для разрешения структурной неопределенности распознаваемого сигнала.

Теоретически, TLS-решение системы (36) теряет уникальность, если $\sigma'_M = \sigma'_{M+1}$ или, более обще, когда малые сингулярные числа кратны:

$$\sigma'_1 \geq \dots \geq \sigma'_B > \sigma'_{B+1} = \dots = \sigma'_{M+1}. \quad (44)$$

В этом случае решение будет отвечать лишь условию минимальности Евклидовой нормы [21].

На практике условие (44) не будет строгим. Часто можно лишь утверждать, что

$$\sigma'_1 \geq \dots \geq \sigma'_B > \sigma'_{B+1} \approx \dots \approx \sigma'_{M+1} \quad (45)$$

или, пользуясь несколько измененным определением ε -ранга (22), разделить множество сингулярных чисел на подмножества доминирующих чисел

$$\sigma'_1 \geq \dots \geq \sigma'_B > \sigma'_{M+1} + \varepsilon \quad (46)$$

и малых чисел

$$\sigma'_{M+1} + \varepsilon \geq \sigma'_{B+1} \geq \sigma'_{B+2} \dots \geq \sigma'_{M+1}, \quad (47)$$

где $\varepsilon > 0$.

Подмножества (46) и (47) делят пространство векторов правой ортонормированной матрицы

$$\mathbf{V}' = [\mathbf{V}'_s \ \mathbf{V}'_n]. \quad (48)$$

на подпространства собственных векторов, формально ассоциированных с полезными составляющими сигнала

$$\mathbf{V}'_s = [v'_1, \dots, v'_B] \in \mathbf{R}^{(M+1) \times B} \quad (49)$$

и шума

$$\mathbf{V}'_n = [v'_{B+1}, \dots, v'_{M+1}] \in \mathbf{R}^{(M+1) \times (M+1-B)}. \quad (50)$$

Для решения общей задачи МНК в условиях со слабо выраженной границей между подмножествами сингулярных чисел (45) Голуб и Ван Лоун [24, 20] предложили воспользоваться понятием ранга (22) расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ и применить следующий алгоритм, приводящий к TLS-решению с минимальной нормой:

1. Вычислить сингулярное разложение расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$ (40) и сохранить правую сингулярную матрицу \mathbf{V}' .

2. Определить номер B сингулярного числа σ'_B , отвечающего условию (46).

3. Выделить пространство столбцов сингулярной матрицы \mathbf{V}' , расположенное правее столбца с номером B . Это будет матрица \mathbf{V}'_n из (50).

4. Вычислить матрицу Хаусхолдера \mathbf{P} , такую, чтобы

$$\mathbf{V}'_n \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{y} \\ 0 \dots 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad (51)$$

где \mathbf{Y} – произвольная матрица, \mathbf{y} – вектор, α – скаляр.

5. Если $\alpha = 0$, то TLS-решение не существует, иначе

$$\hat{\mathbf{a}}_{TLS}^T = -\mathbf{y} / \alpha. \quad (52)$$

Как следует из теоремы [21, Теорема 3.7], если сингулярные числа отвечают условию (44), то Евклидова норма решения (52)

$$\|\hat{\mathbf{a}}_{TLS}^T\|_2 = \sqrt{1 - \alpha^2} / \alpha. \quad (53)$$

Несложно видеть, что условие (45), чаще всего встречающееся на практике, является приближением к строгому условию (44) теоремы. Следовательно, из (53) следует, что при малых значениях скаляра α TLS-решение будет чувствительно к шумам в сигнале.

В работе [25] матрицу Хаусхолдера в (51) предлагается выбрать как

$$\mathbf{P} = [\mathbf{Z}; \mathbf{g}_n] \in \mathbf{R}^{(M+1-B) \times (M+1)}, \quad (54)$$

где $\mathbf{g}_n^T = [v'_{B+1}(L), \dots, v'_{M+1}(L)]$ – вектор, содержащий последние элементы собственных векторов подпространства шума (последние элементы столбцов матрицы \mathbf{V}'_n):

$$\mathbf{V}'_n = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_n \\ \mathbf{g}_n^T \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Здесь \mathbf{Z} – матрица, формирующая нули в последней строке матрицы (51), кроме α . Несложно показать, что в вычислении матрицы \mathbf{Z} нет необходимости. Действительно, при подстановке (54) и (55) в (51) получим

$$\mathbf{V}'_n \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_n \mathbf{Z} & \mathbf{G}_n \mathbf{g}_n \\ \mathbf{g}_n^T \mathbf{Z} & \mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Сравнивая (56) с (51), видим, что решение (52) будет равно

$$\hat{\mathbf{a}}_{TLS}^T = -\mathbf{G}_n \mathbf{g}_n / \mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n. \quad (57)$$

Случай $\alpha = 0$ означает, что $\mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n = 0$. В этом случае, а также тогда, когда α мал, можно поднять границу разделения сингулярных чисел выше, т.е. уменьшить номер B граничного сингулярного числа в правиле (46) до тех пор, пока величина $\mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n$ не примет нужный уровень.

5.4 Эквивалентность подпространств собственных векторов сигнала и шума в общей задаче наименьших квадратов

Изначально [24] общая задача наименьших квадратов была сформулирована на основе использования подпространства шума \mathbf{V}'_n (50). На первый взгляд такой подход выглядит не совсем разумным, поскольку распознавание сигнала ведется с использованием собственных векторов подпространства, определяемых малыми сингулярными числами. Кажется более обоснованным использование подпространства сигнала \mathbf{V}'_s (49). Однако анализ свойств собственных векторов правой сингулярной матрицы

$$\mathbf{V}' = [\mathbf{V}'_s \quad \mathbf{V}'_n]. \quad (58)$$

показывает, что повода для беспокойств нет: решение общей задачи наименьших квадратов может быть выражена и через собственные векторы подпространства сигнала \mathbf{V}'_s . Причем это решение будет эквивалентно решению через собственные векторы подпространства шума \mathbf{V}'_n . Покажем это.

Представим подпространство собственных векторов сигнала (49) по аналогии с выражением (55) для подпространства шума:

$$\mathbf{V}'_s = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \\ \mathbf{g}_s^T \end{bmatrix}, \quad (59)$$

где $\mathbf{g}_s^T = [v'_1(L), \dots, v'_B(L)]$ – вектор, содержащий последние элементы собственных векторов подпространства сигнала (последние элементы столбцов матрицы \mathbf{V}'_s).

Следуя (58) и воспользовавшись представлениями (55) и (59) соответствующих подпространств, правую сингулярную матрицу перепишем следующим образом:

$$\mathbf{V}' = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_n \\ \mathbf{g}_s^T & \mathbf{g}_n^T \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Матрица \mathbf{V}' является унитарной, поэтому в нашем случае

$$\mathbf{V}'(\mathbf{V}')^T = \text{diag}[1, \dots, 1] = \mathbf{I}_{M+1}, \quad (61)$$

где $\mathbf{I}_{M+1} \in \mathbf{R}^{(M+1) \times (M+1)}$ – единичная матрица. При подстановке (60) в (61) последнее равенство перепишется как

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_n \\ \mathbf{g}_s^T & \mathbf{g}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^T & \mathbf{g}_s \\ \mathbf{G}_n^T & \mathbf{g}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix}$$

или более развернуто

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \mathbf{G}_s^T + \mathbf{G}_n \mathbf{G}_n^T & \mathbf{G}_s \mathbf{g}_s + \mathbf{G}_n \mathbf{g}_n \\ \mathbf{g}_s^T \mathbf{G}_s^T + \mathbf{g}_n^T \mathbf{G}_n^T & \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_s + \mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, учитывая свойства последнего столбца единичной матрицы в правой части, получаем

$$\mathbf{G}_s \mathbf{g}_s = -\mathbf{G}_n \mathbf{g}_n \quad (62)$$

и

$$\mathbf{g}_n^T \mathbf{g}_n = 1 - \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_s. \quad (63)$$

Подставляя (62) и (63) в (57) получаем TLS-решение через элементы собственных векторов пространства сигнала \mathbf{V}'_s (59)

$$\hat{\mathbf{a}}_{TLS}^T = \mathbf{G}_s \mathbf{g}_s / (1 - \mathbf{g}_s^T \mathbf{g}_s). \quad (64)$$

Напомним, что решения (57) и (64) не являются уникальными и представляют собой эквивалентные TLS-решения с минимальной нормой.

5.5 Геометрическая интерпретация решений классической и общей задачи наименьших квадратов

Разница между классическим (14) и общим (43) решениями задачи наименьших квадратов хорошо видна из рис. 1.

Классическое решение ищет оценку $\hat{\mathbf{a}}_{LS}$ в подпространстве столбцов $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ траекторной матрицы \mathbf{X} , минимизируя расстояние (10) от вектора наблюдения \mathbf{b} до его проекции \mathbf{b}_{LS} , также расположенной в $\mathbf{R}(\mathbf{X})$. Поэтому все ошибки в данных траекторной матрицы так или иначе транслируются в решение (21).

Общее решение МНК обладает способностью найти подпространство $\mathbf{R}([\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}])$, ближайшее к $M + 1$ столбцам расширенной матрицы $[\mathbf{X}; \mathbf{b}]$. При этом сумма квадратов расстояний от каждого из столбцов \mathbf{x}_i , $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^L$ до подпространства $\mathbf{R}([\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}])$ минимально, и каждый столбец \mathbf{x}_i , \mathbf{b} аппроксимируется их ортогональными проекциями $\hat{\mathbf{x}}_i$, $\hat{\mathbf{b}}$ на это подпространство. Другими словами, общее решение ищется в «очищенном» от шумов подпространстве $\mathbf{R}([\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}])$, аппроксимирующей расширенную матрицу $[\hat{\mathbf{X}}; \hat{\mathbf{b}}]$.

6. Методы настройки моделей в темпе развития процесса в электрической системе

6.1 Метод наложения моделей

Рассмотренные в разделах 3 – 5 матричные методы настройки структурных моделей рассчитаны на цифровые системы, обладающие значительным вычислительным ресурсом. Понятно, что они реализуют свои преимущества в полной мере только при работе в отложенном времени.

Для цифровой релейной защиты и противоаварийной автоматики, работающей в темпе развития процесса в электрической системе, нужны менее затратные с точки зрения вычислений методы настройки структурных моделей, но имеющие сравнимые с известными методами настройки характеристики. Одним из таких методов является метод наложения моделей, предложенный в работе [26] и получивший дальнейшее развитие в работах [27, 3]. Рассмотрим идею метода, излагая ее для общности применительно к гибридной модели сигнала

$$a_0 \hat{x}(k) = \sum_{r=1}^R [\hat{c}_r \cos(r\omega_1 k T_s) - \hat{s}_r \sin(r\omega_1 k T_s)] + \sum_{m=1}^M a_m x(k - mv). \quad (65)$$

Здесь \hat{c}_r и \hat{s}_r – искомые ортогональные составляющие неадаптивной части, a_m – искомые коэффициенты адаптивной части структурной модели.

Матричная запись нормальных уравнений (13) удобна, но не дает наглядного представления о принципах настройки модели. Поэтому лучше записать условия минимизации критерия

$$E(k) = \sum_{i=0}^{L-1} e^2(k - i\eta) \quad (66)$$

в виде привычной системы уравнений ортогональности [27]:

$$\begin{cases} \frac{\partial E(k)}{\partial a_m} = \sum_{i=0}^{L-1} e(k - i\eta) x(k - i\eta - mv) = 0, m = \overline{0, M}, m \neq j, \\ \frac{\partial E(k)}{\partial c_r} = \sum_{i=0}^{L-1} e(k - i\eta) \cos(r\omega_1 T_s (k - i\eta)) = 0, r = \overline{1, R}, \\ \frac{\partial E(k)}{\partial s_r} = \sum_{i=0}^{L-1} e(k - i\eta) \sin(r\omega_1 T_s (k - i\eta)) = 0, r = \overline{1, R}, \end{cases} \quad (67)$$

где

$$e(k) = a_0 \hat{x}(k) - a_0 x(k) = \sum_{r=1}^R [\hat{c}_r \cos(r\omega_1 k T_s) - \hat{s}_r \sin(r\omega_1 k T_s)] + \sum_{m=0}^M a_m x(k - mv), - \quad (68)$$

невязка гибридной модели сигнала. Здесь j – номер уравнения, не участвующего в решении, ибо один из коэффициентов адаптивной части фильтра должен быть зафиксирован во избежание тривиального решения (решения, когда все коэффициенты модели a_m будут равны 0). Поэтому для какого-то коэффициента, в данном случае коэффициента с номером j , уравнение ортогональности не будет записано, что и отражено в системе (73) условием $m \neq j$. Оно произвольно; метод определит его самостоятельно в ходе настройки.

Введем в рассмотрение вектор отсчетов невязки $e(k)$ модели (65)

$$\mathbf{e} = [e(k), e(k - \eta), \dots, e(k - (L - 1)\eta)]^T \in \mathbf{R}^L, \quad (69)$$

векторы последовательностей отсчетов сигнала $x(k)$

$$\mathbf{x}_m = [x(k - (L - 1)\eta - mv), \dots, x(k - \eta - mv), x(k - mv)]^T \in \mathbf{R}^L, \quad (70)$$

$$m = \overline{0, M},$$

связанных с одним и тем же коэффициентом a_m фильтра на всем окне данных настройки, векторы отсчетов опорных сигналов (отсчетов неадаптивной модели)

$$\mathbf{y}_r = [\cos(r\omega_1 T_s (k - (L - 1)\eta)), \dots, \cos(r\omega_1 T_s (k - \eta)), \cos(r\omega_1 T_s k)]^T \in \mathbf{R}^L, \quad (71)$$

и

$$r = \overline{1, R},$$

$$\mathbf{z}_r = [\sin(r\omega_1 T_s (k - (L - 1)\eta)), \dots, \sin(r\omega_1 T_s (k - \eta)), \sin(r\omega_1 T_s k)]^T \in \mathbf{R}^L, \quad (72)$$

$$r = \overline{1, R}.$$

Тогда уравнения (67) в векторной форме примут более компактный и удобный вид:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{x}_m = 0, \quad m = \overline{0, M}, \quad m \neq j, \quad (73)$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{y}_r = 0, \quad (74)$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{z}_r = 0, \quad r = \overline{1, R}. \quad (75)$$

Метод наложения решает систему уравнений (73) – (75) путем последовательного наложения промежуточных фильтров. Причем наложения, исполь-

зубые для решения уравнений ортогональности неадаптивной части (74) и (75), должны быть выполнены в обязательном порядке и без исключения. Это связано с тем, что неадаптивный оператор является фиксированной моделью сигнала, и для определения ее параметров необходимо решить все уравнения ортогональности. Поэтому число этапов настройки гибридного фильтра не меньше, по крайней мере, порядка неадаптивного оператора $2R$.

Идея метода основана на свойстве промежуточных фильтров $\mathbf{e}_p^q, p = 0, (M + 2R - q)$, текущего этапа настройки сохранять ортогональность к вектору, например \mathbf{x}_s , если они получены путем попарного наложения двух других аналогичных фильтров \mathbf{e}_h^{q-1} и \mathbf{e}_t^{q-1} предыдущего $(q - 1)$ -го этапа, уже ортогональных с вектором \mathbf{x}_s , по следующему правилу:

$$\mathbf{e}_p^q = \mathbf{e}_h^{q-1} + \gamma_p^q \mathbf{e}_t^{q-1}. \quad (76)$$

Коэффициент наложения γ_p^q определяется из уравнения ортогональности вектора невязки нового фильтра \mathbf{e}_p^q к вектору новой последовательности \mathbf{x}_m

$$(\mathbf{e}_p^q)^T \mathbf{x}_m = 0 \quad (77)$$

и с учетом (76) будет равен

$$\gamma_p^q = - \frac{(\mathbf{e}_h^{q-1})^T \mathbf{x}_m}{(\mathbf{e}_t^{q-1})^T \mathbf{x}_m}. \quad (78)$$

Поскольку для фильтров предыдущего этапа \mathbf{e}_h^{q-1} и \mathbf{e}_t^{q-1} уже установлена ортогональность с последовательностью \mathbf{x}_s , то справедливы равенства

$$(\mathbf{e}_h^{q-1})^T \mathbf{x}_s = 0, \quad (\mathbf{e}_t^{q-1})^T \mathbf{x}_s = 0,$$

и ортогональность нового фильтра (76) с последовательностью \mathbf{x}_s сохраняется:

$$(\mathbf{e}_p^q)^T \mathbf{x}_s = (\mathbf{e}_h^{q-1})^T \mathbf{x}_s + \gamma_p^q (\mathbf{e}_t^{q-1})^T \mathbf{x}_s = 0.$$

Схема взаимосвязей между последовательностями отсчетов входного сигнала, опорных сигналов и выходного сигнала фильтра приведена на рис. 2 и рис. 3.

Таким образом, для решения уравнений (73) – (75) необходимо взять $M + 1 + 2R$ промежуточных фильтров и путем их поэтапного наложения друг с другом получить итоговый фильтр, удовлетворяющий всем условиям ортогональности. Такие фильтры получили название решетчатых [28].

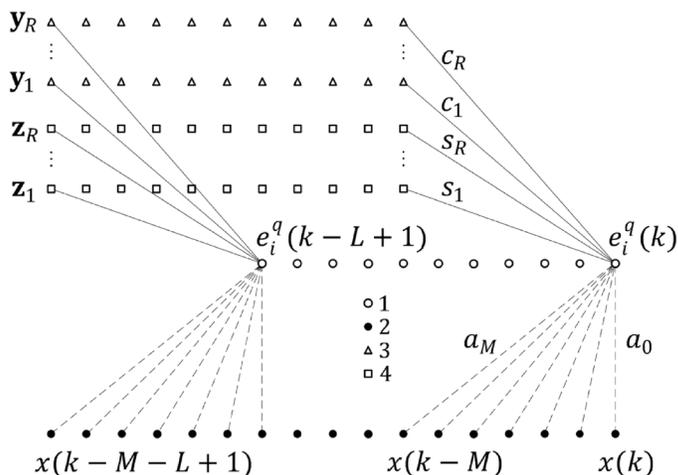


Рис.2. Схема взаимосвязей в промежуточном фильтре с настроенной неадаптивной частью (при $\nu=1, \eta=1$). Связь отсчетов выходного сигнала (1) фильтра с отсчетами входных сигналов (2) и опорных сигналов (3) и (4) показана линиями: сплошные указывают, что условия ортогональности для этих связей выполнены, а штриховые – предстоит выполнить. Каждая из линий соответствует связи отсчета выходного сигнала, устанавливаемой коэффициентами гибридной модели (65) с соответствующими элементами последовательностей y_r и z_r ($r=1, R$) и x_m ($m=1, M$)

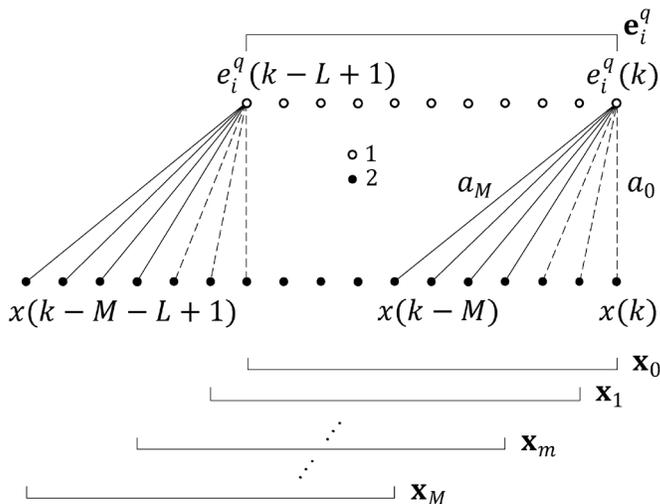


Рис. 3. Схема взаимосвязей между последовательностями отсчетов выходного сигнала e_p^q и отсчетов входного сигнала x_m ($m=0, M$) в адаптивной части промежуточного фильтра рис. 2 (неадаптивная часть не показана). Связь отсчета выходного сигнала (1) фильтра с отсчетами входного сигнала (2) показана линиями: сплошные указывают, что условия ортогональности для этих связей выполнены, а штриховые – предстоит выполнить. Прямоугольными скобками показаны последовательности отсчетов выходного и входного сигналов e_p^q и x_m ($m=0, M$) соответственно

6.2 Схема наложения фильтров

В настройке структурной модели можно выделить этапы инициализации промежуточных фильтров, отдельные этапы настройки неадаптивной и адаптивной частей фильтров.

Инициализация. Этап инициализации фильтров удобно считать нулевым этапом настройки ($q = 0$). В соответствии с уравнением гибридной модели (65) на нем формируются $M + 1 + 2R$ промежуточных фильтров, каждый из которых представляет собой прототип будущего фильтра и характеризуется векторами коэффициентов (ортогональных составляющих соответствующих гармоник)

$$\mathbf{c}_{p,q} = [c_{p,1}, c_{p,2}, \dots, c_{p,r}, \dots, c_{p,R}]^T, \quad (79)$$

и

$$\mathbf{s}_{p,q} = [s_{p,1}, s_{p,2}, \dots, s_{p,r}, \dots, s_{p,R}]^T, \quad (80)$$

в неадаптивной и вектором коэффициентов

$$\mathbf{a}_{p,q} = [a_{p,0}, a_{p,1}, \dots, a_{p,m}, \dots, a_{p,M}]^T, \quad (81)$$

в адаптивной частях, где $p = \overline{0, M + 2R}$ – номер промежуточного фильтра (здесь и далее все обозначения даны для текущего q -го этапа настройки, для упрощения выражений в обозначениях коэффициентов обозначения этапа опущены). Возможно, что размер R векторов ортогональных составляющих (79) и (80) будет избыточным, но метод скорректирует его в ходе настройки, нивелируя амплитуды несуществующих гармонических составляющих.

Удобно рассматривать фильтры в виде соответствующих столбцов вещественной матрицы

$$\mathbf{A}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{0,q} & \mathbf{c}_{1,q} & \dots & \mathbf{c}_{p,q} & \dots & \mathbf{c}_{(M+2R-q),q} \\ \mathbf{s}_{0,q} & \mathbf{s}_{1,q} & \dots & \mathbf{s}_{p,q} & \dots & \mathbf{s}_{(M+2R-q),q} \\ \mathbf{a}_{0,q} & \mathbf{a}_{1,q} & \dots & \mathbf{a}_{p,q} & \dots & \mathbf{a}_{(M+2R-q),q} \end{bmatrix} = \quad (82)$$

$$= [\mathbf{A}_q(0) \mathbf{A}_q(1) \dots \mathbf{A}_q(p) \dots \mathbf{A}_q(M + 2R - q)] \in \mathbf{R}^{(2R+M+1) \times (M+1+2R-q)}$$

число строк которой определяется, очевидно, длиной векторов (79) – (81), а число столбцов – числом промежуточных фильтров $(M + 1 + 2R - q)$ текущего этапа, убавляющемся на единицу после каждого этапа настройки.

На этапе инициализации коэффициенты векторов $\mathbf{c}_{p,q}$, $\mathbf{s}_{p,q}$, $\mathbf{a}_{p,q}$ задаются произвольным образом. Главное, чтобы фильтры изначально не были линейно зависимыми. Например, инициализация может быть выполнена как заполнение матрицы единицами, кроме побочной диагонали:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(2R+M+1) \times (M+1+2R)}. \quad (83)$$

Наиболее простым является инициализация в виде единичной матрицы:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{I} = \text{diag}[1, \dots, 1], \quad (84)$$

однако нужно иметь в виду, что этот способ инициализации может привести к потере порядка промежуточных фильтров при наложении соседних фильтров.

Стартовые значения коэффициентов векторов $\mathbf{c}_{p,q}$, $\mathbf{s}_{p,q}$, $\mathbf{a}_{p,q}$ могут быть получены и с помощью генератора случайных чисел.

Матрице коэффициентов промежуточных фильтров \mathbf{A}_q можно поставить в соответствие матрицу их невязок, вычисленных согласно (76) для каждого промежуточного фильтра и представленных в виде вектора (69):

$$\mathbf{E}_q = \left[\mathbf{e}_0^q, \mathbf{e}_1^q, \dots, \mathbf{e}_p^q, \dots, \mathbf{e}_{(M+2R-q)}^q \right] \in \mathbf{R}^{L \times (M+1+2R-q)}. \quad (85)$$

Начальные значения векторов невязок (85) при инициализации (при $q = 0$)

$$\mathbf{E}_0 = \left[\mathbf{e}_0^0, \mathbf{e}_1^0, \dots, \mathbf{e}_p^0, \dots, \mathbf{e}_{(M+2R)}^0 \right] \in \mathbf{R}^{L \times (M+1+2R)} \quad (86)$$

вычисляются согласно выражению (68) по коэффициентам промежуточных фильтров матрицы \mathbf{A}_0 (83) или (84).

Этапы настройки. После каждого этапа настройки q остается $M + 1 + 2R - q$ промежуточных фильтров. Выходной сигнал каждого из них \mathbf{e}_p^q , $p = \overline{0, (M + 2R - q)}$ формируется по правилу наложения (76) исходя либо из уравнений ортогональности (77) с последовательностью отсчетов сигнала \mathbf{x}_m (70), либо уравнений ортогональности

$$(\mathbf{e}_p^q)^T \mathbf{y}_r = 0, \quad (87)$$

$$(\mathbf{e}_p^q)^T \mathbf{z}_r = 0, \quad (88)$$

решающих нормальные уравнения (74) и (75). Коэффициенты наложения в формуле (76) при решении уравнений ортогональности (87) и (88) определяются аналогично выражению (78) с учетом используемой последовательности отсчетов опорных сигналов. При решении уравнений (87)

$$\gamma_p^q = -\frac{(\mathbf{e}_h^{q-1})^T \mathbf{y}_r}{(\mathbf{e}_t^{q-1})^T \mathbf{y}_r}, \quad (89)$$

а при решении (88) –

$$\gamma_p^q = -\frac{(\mathbf{e}_h^{q-1})^T \mathbf{z}_r}{(\mathbf{e}_t^{q-1})^T \mathbf{z}_r}. \quad (90)$$

Как уже отмечалось, вначале рекомендуется выполнять условия ортогональности (87) и (88) для неадаптивной части, а затем – условия ортогональности (77) для адаптивной части модели. При этом правило наложения (76) не зависит от выполняемого на текущем этапе настройки q условия ортогональности.

Из (76) следует, что невязки текущего q -го этапа настройки всегда вычисляются через невязки промежуточных фильтров предыдущего $(q-1)$ -го этапа. Поэтому в ходе настройки коэффициенты промежуточных фильтров используются только один раз и только на этапе инициализации: с помощью них вычисляется матрица невязок нулевого этапа \mathbf{E}_0 в соответствии (85).

Выражения для коэффициентов промежуточных фильтров следуют непосредственно из правила наложения (76). Воспользовавшись линейной зависимостью невязки от коэффициентов, из (76) получаем рекуррентное выражение для определения коэффициентов промежуточных фильтров на каждом этапе настройки:

$$[\mathbf{c}_{p,q}; \mathbf{s}_{p,q}; \mathbf{a}_{p,q}]^T = [\mathbf{c}_{h,q-1}; \mathbf{s}_{h,q-1}; \mathbf{a}_{h,q-1}]^T + \gamma_p^q [\mathbf{c}_{t,q-1}; \mathbf{s}_{t,q-1}; \mathbf{a}_{t,q-1}]^T \quad (91)$$

или более компактно с учетом (82):

$$\mathbf{A}_q(p) = \mathbf{A}_{q-1}(h) + \gamma_p^q \mathbf{A}_{q-1}(t). \quad (92)$$

Как видно из (92) и (78), возможны различные сочетания промежуточных фильтров (номеров h и t) с одной стороны и фильтров и векторов (номеров h , t и m) с другой стороны. Все это определяет разнообразие вари-

антов выбора стратегии наложения фильтров (ранжирование промежуточных фильтров) и выбора векторов \mathbf{x}_m (ранжирование последовательностей). Ход наложений промежуточных фильтров влияет на свойства окончательного фильтра. Рассмотрим алгоритмы выбора стратегии настройки фильтра, направленные на разрешение структурной неопределенности модели в методе наложения фильтров [27, 3, 29].

6.3 Настройка неадаптивного оператора

Адаптация структурной модели (93) к сигналу $x(k)$ начинается с выполнения уравнений ортогональности (87) и (88) для неадаптивного оператора, причем число наложений промежуточных фильтров, как уже отмечалось, строго задано его порядком и составляет $2R$.

Настройка неадаптивного оператора в некоторых случаях имеет самостоятельное значение, поскольку ее результаты могут быть использованы без настройки адаптивной части модели. Например, при определении компонентов периодического сигнала с гармоническим составом по его отрезку, длина которого меньше периода основной гармоники (Фурье-анализ). В этом случае уравнения ортогональности (77) для адаптивной части не выполняют.

Нужно иметь в виду, что, хотя при настройке неадаптивной части рассматриваются только уравнения ортогональности к векторам отсчетов опорных сигналов (71) и (72), но при наложении промежуточных фильтров меняются все коэффициенты нового фильтра, как коэффициенты неадаптивной части $\mathbf{c}_{p,q}$ и $\mathbf{s}_{p,q}$, так и коэффициенты адаптивной части $\mathbf{a}_{p,q}$. Это следует непосредственно из правила вычисления коэффициентов (91) или (92).

Оценки параметров неадаптивной части модели будут иметь смещение, вызванное действием адаптивного оператора на входной сигнал. Оно устраняется с учетом частотной характеристики адаптивного оператора, путем следующей замены переменных

$$\hat{c}'_r + j\hat{s}'_r = (\hat{c}_r + j\hat{s}_r) / \underline{H}(jr\omega_1 T_s),$$

где $\underline{H}(jr\omega_1 T_s)$ – комплексный коэффициент передачи адаптивного оператора на частоте $r\omega_1$.

При использовании гибридной модели (94) для распознавания периодических сигналов с гармоническим составом существует вероятность появления сингулярности в вычислении коэффициента наложения γ_p^q по (87) или (88), особенно, когда длина отрезка сигнала близка или кратна периоду опорных сигналов. Чтобы избежать этого, к сигналу $x(k)$ полезно добавлять стабилизирующую составляющую, недоступную для неадаптивной модели,

например, $x_\delta(k) = \delta k$, где δ – малая доля от амплитуды сигнала.

6.4 Разрешение структурной неопределенности адаптивного оператора

После настройки неадаптивного оператора неортогональными векторам невязок \mathbf{e}_p^q останутся лишь векторы \mathbf{x}_m отсчетов входного сигнала. Поэтому дальнейшая настройка фильтра ведется согласно условиям ортогональности (77). Промежуточные фильтры перенастраиваются согласно (76) с сохранением достигнутой на предыдущих этапах ортогональности векторов невязок \mathbf{e}_p^q векторам \mathbf{y}_r и \mathbf{z}_r .

Поскольку порядок адаптивной части, как правило, превышает порядок сигнала (к тому же неадаптивная часть фильтра может взять на себя часть нагрузки модели), то потенциально возможна ситуация, когда избыток порядка модели порождает сингулярность в решении. Среди промежуточных фильтров могут появиться близкие прототипы, наложение которых может привести к фатальному разрушению итогового фильтра. Существует несколько стратегий, исключающих такие неприятности в настройке фильтра. Рассмотрим их.

Контроль уровня корреляций. Для каждого из $M + 2R - q$ фильтров, формируемых на этапе q , устанавливается ортогональность (77) с одной из последовательностей

$$\mathbf{x}_m, m = \overline{0, M} \quad (95)$$

(кроме тех \mathbf{x}_m , для которых ортогональность уже достигнута на предыдущих этапах).

Как видно из (78), при выполнении условия ортогональности (77) нужно избегать взаимодействия промежуточных фильтров с последовательностями \mathbf{x}_m входного сигнала, для которых абсолютные величины корреляций $\left| \left(\mathbf{e}_h^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right|$ и $\left| \left(\mathbf{e}_t^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right|$ малы. Корреляции таких фильтров подвержены сильному влиянию шумов в отсчетах последовательностей. Для повышения достоверности результата на каждом этапе настройки необходимо контролировать величины корреляций и исключать из процесса адаптации те последовательности, абсолютное значение корреляций которых с невязками фильтров ниже некоторого порога $\varepsilon > 0$ (ложная ортогональность):

$$\left| \left(\mathbf{e}_p^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right| < \varepsilon, p = \overline{0, M - q}. \quad (96)$$

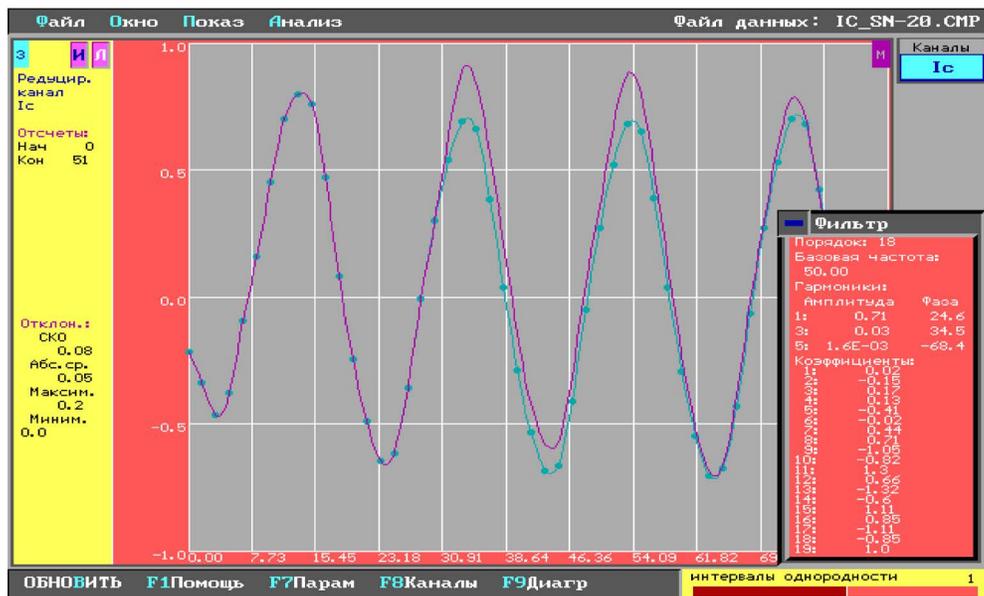


Рис. 4. Экстраполирующая модель реального тока короткого замыкания ЛЭП-500 при адаптации фильтра без контроля уровня корреляций (здесь и далее на рисунках кружки соответствуют отсчетам входного сигнала, а кривая без кружков - оценке модели); *неудовлетворительный результат*

Если величины корреляций $\left| \left(e_p^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right|$ для последовательностей \mathbf{x}_m (95) (кроме исключенных по условию (96) и принявших участие в наложении ранее) не ниже установленного порога ε , то считается допустимым устанавливать ортогональность с последовательностью отсчетов \mathbf{x}_m все $M + 1 - q$ промежуточных фильтров этапа q . Иначе вектор \mathbf{x}_m бракуется и в дальнейшей настройке фильтров участия не принимает. С точки зрения решения системы (73) это адекватно удалению из рассмотрения линейно зависимых уравнений.

В действии критерия (96) можно узреть своеобразную аналогию с контролем величин сингулярных чисел в методах настройки моделей с минимальной нормой, рассмотренных в разделах 4.2 и 5.3 .

Контроль величины корреляции по (96) не дает явной оценки достоверности модели, но позволяет, исключая наложения с заведомо плохими с точки зрения решения задачи векторами \mathbf{x}_m , поддерживать ее на необходимом уровне.

На роль последовательности в ходе настройки адаптивной части фильтра может претендовать любой из векторов \mathbf{x}_m (95), но во избежание тривиального решения одна из них должна быть исключена из числа претендентов, поскольку число наложений должно быть не более порядка M .

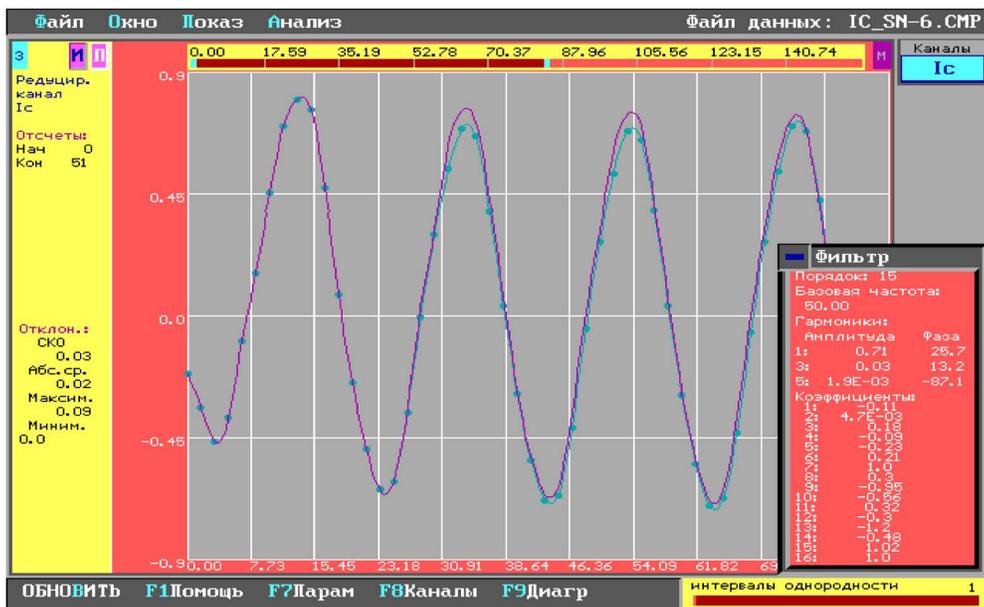


Рис.5. Экстраполирующая модель рис. 4 при адаптации фильтра с контролем уровня корреляций с порогом $\varepsilon = 10^{-6}$; *улучшенный результат*

Величина параметра ε зависит в первую очередь от уровня шумов в сигнале, но не последнюю роль при ее выборе играет и соотношение между доминирующими слагаемыми и составляющими малой амплитуды сигнала. Очевидно, что уровень ε влияет на разрешающую способность фильтра по отношению к составляющим относительно малого уровня.

Для незашумленных сигналов величина $\varepsilon = 10^{-9} \div 10^{-12}$ и определяется, в основном, шумами вычислений. Для реальных сигналов, в которых, как минимум, присутствуют шумы АЦП, $\varepsilon = 10^{-5} \div 10^{-6}$. При выборе порога ε нужно проявлять тщательность, поскольку необоснованный выбор его величины может привести к разрушительным последствиям настройки вследствие преждевременной ее остановки или из-за выполнения избыточного числа наложений. Избыточное наложение уже настроенных промежуточных фильтров (фильтров, обретших эффективность) приводит к потере их эффективности, так как в наложении участвуют фильтры, величины корреляций $\left| \left(\mathbf{e}_h^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right|$ и $\left| \left(\mathbf{e}_t^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right|$ которых малы и подвержены значительному влиянию шумов в сигнале.

В качестве примера рассмотрим построение модели фазного тока I_C , снятого регистратором аварийных сигналов на ЛЭП 500 кВ. Начальные условия настройки фильтров: частота дискретизации 600 Гц, порядок адаптивно-



Рис. 6. Экстраполирующая модель сигнала рис. 4 при адаптации фильтра с контролем уровня корреляций и ранжированием последовательностей; *эффективная структурная модель*

го оператора 20, в состав неадаптивного оператора включены первая, третья и пятая гармоники промышленной частоты (50 Гц), блок настройки фильтра содержал 51 отсчет, все 96 отсчетов осциллограммы тока I_C представляли один интервал однородности.

Сначала обрабатываем сигнал без контроля уровня корреляций. На рис. 4 приведены результаты построения экстраполирующей модели. После реконструкции фильтра по скорректированным корням результирующий порядок адаптивного оператора снижен до 18. Среди составляющих неадаптивного оператора идентифицирована первая гармоника (амплитуды третьей и пятой гармоник практически равны нулю). Качество адаптации, достигнутое за 26 этапов наложений, оставляет желать лучшего: интервал однородности ошибочно разбит на два участка: $[0, 51]$ и $[52, 95]$, среднеквадратичная ошибка (СКО) предсказания отсчетов сигнала по полученной модели на первом интервале составляет более 10% от амплитуды первой гармоники.

На рис. 5 показана экстраполирующая модель этого же сигнала, построенная при контроле уровня корреляций с порогом $\varepsilon = 10^{-6}$. Благодаря контролю одна из последовательностей отсчетов сигнала, корреляция которой с выходным сигналом модели была ниже порога, была исключена из адаптации. После коррекции корней порядок адаптивного оператора экстраполирующей модели понижен до 15. Качество модели значительно улучшилось (СКО уменьшилось более чем в 2 раза,

интервал однородности идентифицирован правильно), но отклонение кривой модели от реального сигнала еще велико (максимальное отклонение 0,09).

Дальнейшее улучшение модели возможно при более скрупулезном учете свойств последовательностей \mathbf{x}_m (95).

Ранжирование последовательностей. Интуитивно ясно, что порядок установления ортогональности между векторами невязок \mathbf{e}_p^q и последовательностями отсчетов \mathbf{x}_m входного сигнала влияет на качество адаптации промежуточных фильтров, а значит и на свойства итогового фильтра. Поэтому важно на каждом этапе настройки фильтра выбирать из множества последовательностей \mathbf{x}_m те, которые обеспечивают оптимальное наложение. Такой выбор последовательностей будем называть *ранжированием*. Остановимся подробнее на рассмотрении способов ранжирования последовательностей и преимуществ, которые дает их использование.

Критерии ранжирования. Рассмотрим два критерия ранжирования последовательностей \mathbf{x}_m . Первый: последовательность \mathbf{x}_m из набора (95) выбирается по минимаксному критерию, то есть таким образом, чтобы перед началом наложений данного этапа q минимальная по абсолютной величине из всех корреляций имела максимальное значение:

$$\min_p \left| \left(\mathbf{e}_p^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right|^m \rightarrow \max, \quad p = \overline{0, M-q}, \quad m = \overline{0, M} \quad (97)$$

(кроме тех \mathbf{x}_m , для которых ортогональность уже достигнута на предыдущих этапах).

Второй: по критерию максимума нормы корреляций:

$$\max_m \sum_{p=0}^{M-q} \left[\left(\mathbf{e}_p^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right]^2, \quad m = \overline{0, M} \quad (98)$$

(кроме тех \mathbf{x}_m , для которых ортогональность уже достигнута на предыдущих этапах).

Вычислительный эксперимент показал, что критерий (97) более чувствителен к различию между последовательностями \mathbf{x}_m , чем критерий (98), поскольку последний склонен к нивелированию свойств последовательностей. Поэтому предпочтение стоит отдавать критерию (97), тем более, что он требует меньших вычислительных затрат.

Введение ранжирования последовательностей \mathbf{x}_m значительно улучшает условия адаптации. В то же время эффект от ранжирования последовательностей еще усиливается, если его сочетать с контролем уровня корреляции. На рис. 6 приведены результаты построения экстраполирующей модели при контроле уровня корреляций и ранжировании последовательностей.

В ходе настройки фильтра было выполнено 11 адаптивных наложений (исключено из адаптации 10 «плохих» последовательностей отсчетов). Порядок реконструированного адаптивного оператора фильтра 12, что меньше порядка предыдущих моделей. Как видно из рис. 6, полученная модель с высокой точностью описывает сигнал (максимальное отклонение равно 0,05).

Таким образом, исключение из процесса настройки последовательностей \mathbf{x}_m , имеющих малый уровень корреляций с выходными сигналами промежуточных фильтров, и ранжирование оставшихся последовательностей позволяют повысить достоверность моделей.

Ранжирование промежуточных фильтров. Ортогональность промежуточных фильтров \mathbf{e}_p^q с выбранной последовательностью \mathbf{x}_m , определяемая как выполнение условия (77), должна достигаться в результате оптимального выполнения наложений промежуточных фильтров предыдущего $(q-1)$ -го этапа. Ясно, что наложение двух близких фильтров – фильтров с одинаковой величиной корреляции:

$$\left| \left(\mathbf{e}_h^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right| \approx \left| \left(\mathbf{e}_t^{q-1} \right)^T \mathbf{x}_m \right| \quad (99)$$

в результате создает заведомо плохой фильтр, имеющий тривиальную нулевую ортогональность с последовательностью \mathbf{x}_m . Если такое наложение



Рис.7. Экстраполирующая модель тока короткого замыкания ЛЭП-500 при адаптации фильтра с контролем уровня корреляций, ранжированием последовательностей отсчетов сигнала и удалением линейно зависимых промежуточных фильтров

произошло, то среди фильтров текущего этапа появится дефектный фильтр, свойства которого непредсказуемы. Поэтому для поддержания оптимальных условий настройки фильтра необходимо использовать оптимальную схему наложения промежуточных фильтров и предусмотреть исключение из схемы наложения линейно зависимых фильтров.

Выбор схемы наложения. Схема наложения промежуточных фильтров должна обеспечивать наложение фильтров, максимально различающихся по абсолютной величине корреляции с последовательностью \mathbf{x}_m . Наиболее простой является схема, основанная на ранжировании промежуточных фильтров по невозрастанию абсолютных величин корреляций:

$$|w_0| \geq |w_1| \geq \dots \geq |w_p| \geq \dots \geq |w_{M-(q-1)}|, \quad (100)$$

где

$$w_p = (\mathbf{e}_p^{q-1})^T \mathbf{x}_m - \quad (101)$$

обозначение корреляции p -го промежуточного фильтра с последовательностью \mathbf{x}_m . Фильтры этапа q получают путем наложения фильтра с наименьшим номером со всеми остальными фильтрами. В данном случае, таким фильтром будет фильтр с номером 0. Вычислительные эксперименты подтвердили превосходство такой схемы над другими (например над схемой, когда накладываются соседние фильтры).

Контроль и исключение линейно зависимых фильтров. Выявление линейно зависимых фильтров путем сравнения коэффициентов наложения \mathbf{e}_p^q (78) удобнее, чем контроль корреляций по условию (99). При принятой схеме наложения проверка фильтров осуществляется путем последовательной проверки абсолютных значений коэффициентов наложения, вычисляемых согласно (78) с учетом правила ранжирования (100) и обозначения (101) как

$$\gamma_p^q = -w_p / w_0, \quad p = \overline{1, M - (q - 1)}. \quad (102)$$

Условием отбраковки соседнего фильтра со старшим номером будет служить неравенство (*критерий линейной зависимости фильтров*)

$$|\gamma_p^q| - |\gamma_{p+1}^q| \leq \delta, \quad p = \overline{1, M - (q - 1)}. \quad (103)$$

Обычно $\delta = 0,02 \div 0,03$.

На рис. 7 показана экстраполирующая модель тока I_C , построенная при

одновременном ранжировании последовательностей, контроле уровня корреляций с порогом $\varepsilon = 10^{-6}$, ранжировании фильтров и удалении линейно зависимых промежуточных фильтров с $\delta = 0,02$.

При настройке модели со стартовым порядком адаптивного оператора $M = 20$ и тремя гармониками в неадаптивном операторе в ходе адаптации удаляются 5 линейно зависимых фильтров и выполняется 15 адаптивных наложений. В итоге экстраполирующая модель имеет адаптивный порядок, равный 10.

Отметим еще один важный нюанс в настройке фильтров. В ходе наложений коэффициенты промежуточных фильтров проявляют тенденцию либо к уменьшению своих значений, либо к увеличению. И то, и другое плохо сказывается на результате адаптации, поскольку искусственно меняет уровень невязки, а значит и абсолютную величину корреляции фильтра. Поэтому в процедуре настройки необходимо предусмотреть нормализацию коэффициентов и невязок промежуточных фильтров.

Окончание настройки фильтра. Настройка прекращается, если в рассмотрении остается единственный фильтр, либо абсолютные величины корреляций фильтров с оставшимися в распоряжении последовательностями x_m малы и должны быть исключены из рассмотрения согласно критерию (96), либо фильтры отбрасываются по критерию линейной зависимости (103).

Поскольку порядок фильтра всегда превышает порядок сигнала, то часто создается ситуация, когда фильтр успешно заканчивает настройку, выполнив неполный цикл наложений. В этом случае на роль итогового фильтра будут претендовать несколько промежуточных фильтров последнего этапа. Все они являются эффективными, а значит, все эти фильтры имеют одинаковый фильтр эффективного ядра, хотя фильтры шума могут быть и разными [4].

Выводы

1. Винеровская оценка коэффициентов адаптивной модели принципиально возможна лишь при наличии шума в сигнале, поскольку при распознавании «чистого» сигнала решение классической задачи наименьших квадратов вырождается. Кроме того, винеровская оценка уступает оценкам, основанным на применении ортогональных преобразований; особенно в задачах с плохо обусловленной траекторной матрицей.

2. В задачах с плохой обусловленностью, например, при распознавании гармонических составляющих близких частот (задача распознавания сигнала асинхронного режима электрической сети), проблемы винеровской оценки разрешают, обычно, формируя оценки с минимальной нормой на основе анализа сингулярных чисел траекторной матрицы.

3. При распознавании сигналов с высоким содержанием шума (задача структурного анализа сигналов режима однофазного замыкания на землю) предпочтительны оценки, формируемые на основе решения общей задачи наименьших квадратов. В основу задачи кладется сингулярный анализ расширенной матрицы, получаемой конкатенацией траекторной матрицы с вектором наблюдения. При слабой разграничиваемости сингулярных чисел (задача выделения слабой слагаемой на фоне доминирующих составляющих) оценка ее базового решения уступает оценке, основанной на разграничении сингулярных векторов на подпространства сигнала и шума.

4. В системах релейной защиты, когда распознавание сигнала принципиально идет в масштабе развития процесса в электрической сети, лучшим – с точки зрения затрат вычислительных ресурсов – является метод наложения моделей, возможности которого близки к методу с минимальной нормой.

Литература:

1. Антонов В.И., Наумов В.А., Солдатов А.В., Иванов Н.Г. Особенности структурного анализа тока сетей 110 – 750 кВ // Материалы 9-й Всерос. НТК "Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике". Чебоксары. Изд-во Чуваш. ун-та. 2014. С. 240-242.
2. Лосев С.Б., Чернин А.Б. Расчет электромагнитных переходных процессов для релейной защиты на линиях большой протяженности. М.: Энергия. 1972. 144 с.
3. Антонов В.И., Лазарева Н.М., Пуляев В.И. Методы обработки цифровых сигналов энергосистем. М.: НТФ «Энергопрогресс», «Энергетик». 2000. – 83 с.
4. Антонов В.И., Наумов В.А., Солдатов А.В., Иванов Н.Г. Фундаментальные свойства эффективных структурных моделей тока короткого замыкания электрической сети // Цифровая электротехника: проблемы и достижения: сб. науч. трудов НПП «ЭКРА». Выпуск 3. – Чебоксары: РИЦ «СРЗАУ». – 2014. – С.18-29.
5. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques. London: Chapman&Hall/CRC. 2001. 305 p.
6. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения: Пер. с англ. // Под ред. Г.И. Марчука. М.: Мир. 1980. – 454 с.
7. Gauss C.F. Theoria combinationis observationum erroribus minimus obnoxiae // Commen. Soc. Reg. Sci. Gotten // Recent., 5. 1823. – P. 33-90.
8. Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. – Wiley/ N.Y. 1949.
9. Грант П.М., Коуэн К.Ф.Н., Фридлендер Б. и др. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
10. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М: Мир. 1990. – 584 с.
11. Антонов В.И., Лямец Ю.Я. Разрешающая способность метода наименьших квадратов при оценивании основной гармоники тока короткого замыкания // Изв. вузов. Энергетика. 1990. №2. С. 48-51.

12. Osowski S. SVD technique for estimation of harmonic components in a power system: a statistical approach // IEE Proc., Gener. Transm. Distrib. Vol. 141, No. 5, September 1994. – P. 473–479.
13. Lobos T., Kozina T., Koglin H.-J. Power System Harmonic Estimation using Linear Least Squares Method and SVD // IEE Proc., Gener. Transm. Distrib. Vol. 148, No. 6, November 2001. – P. 567-572.
14. Hauer J.F., Demeure C.J., Scharf L.L. Initial result in Prony analysis of power system response signals/ IEEE Trans. Power Systems. Vol. 5, No.1, February 1990. – P.80-89.
15. Chaari O., Bastard P., Meunier M. Prony's method: an efficient tool for the analysis of earth fault currents in Petersen-coil-protected networks/ IEEE Trans. in Power Delivery. Vol. 10, No.3, July 1995. P.1234-1241.
16. Антонов В.И., Ильин А.А., Лазарева Н.М., Ольгина М.А. Эффективные методы структурного анализа цифровых сигналов электроэнергетических систем // Вестник Чувашского университета. № 3-4. 2000. – С. 82-90.
17. Tufts D.W., Kumaresan R. Frequency estimation of multiple sinusoids: Making linear prediction perform like maximum likelihood // Proc. IEEE, vol. 70, no. 9, pp. 975-989. – 1982.
18. Eckart C., Young G. The approximation of one matrix by another of lower rank // Psychometrica, vol. 1, no.3, pp. 211-218, 1936.
19. Mirsky L. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms //Quart. J. Math. Oxford, vol. 11, no 1, 1960. – P. 50–59.
20. Голуб Дж. Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир. 1999. – 548 с.
21. Huffel S. V., Vandewalle J. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis. Philadelphia: SIAM. 1991. 300 p.
22. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир. 1980. – 280 с.
23. Антонов В.И., Наумов В.А., Фомин А.И., Солдатов А.В. Обработка сигнала с высокой частотой дискретизации в цифровой релейной защите и автоматике // Цифровая электротехника: проблемы и достижения: Сб. научн. трудов НПП «ЭКРА». Выпуск II. – Чебоксары: РИЦ «СРЗАУ». 2013. – С. 12-21.
24. Golub G.H., Van Loan C.F. An Analysis of the Total Least Squares Problem //SIAM J. Num. Anal. Vol. 17. No. 6. P. 883-893.
25. Rahman M. A., Yu Y. K. Total Least Square Approach for Frequency Estimation using Linear Prediction // IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing. Vol. ASSP-35. Oct. 1987. P. 1440-1454.
26. Лямец Ю.Я., Антонов В.И., Арсентьев А.П. Адаптивная цифровая обработка входных величин релейной защиты//Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. №6. 1988. С. 51-59.
27. Антонов В.И., Лазарева Н.М. Решетчатый адаптивный фильтр с контролем достоверности результата для распознавания сигналов электрических систем // Изв. РАН. Энергетика. №6. 1997 г. С.63-69.
28. Куреши Ш. У. Х. Адаптивная коррекция // ТИИЭР. 1985. Т. 73. №9. – С. 5-49.
29. Лазарева Н.М. Алгоритмы структурной компрессии цифровых осциллограмм сигналов электроэнергетических систем. Автореф. дис. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. Чебоксары, 1997. 27 с.

Сведения об авторах



Антонов Владислав Иванович^{1,2}

Окончил в 1978 г. факультет электрификации и автоматизации промышленности ЧГУ им. И.Н. Ульянова. В 1985 г. защитил в Ленинградском политехническом институте кандидатскую диссертацию «Разработка и исследование новых принципов построения измерительных органов направленных защит линий электропередачи». Доцент кафедры теоретических основ электротехники и релейной защиты и автоматики ЧГУ им. И.Н. Ульянова, главный специалист отдела РЗА станционного оборудования ООО НПП «ЭКРА».



Наумов Владимир Александрович^{1,2}

Окончил в 2001 г. электроэнергетический факультет ЧГУ им. И.Н. Ульянова. В 2002 г. защитил магистерскую диссертацию. В 2005 г. защитил во ВНИИЭ кандидатскую диссертацию «Анализ и совершенствование продольных дифференциальных защит генераторов и блоков генератор-трансформатор». Доцент кафедры теоретических основ электротехники и релейной защиты и автоматики ЧГУ им. И.Н. Ульянова, заместитель генерального директора - технический директор ООО НПП «ЭКРА».



Иванов Николай Геннадьевич^{1,2}

Окончил в 2013 г. электроэнергетический факультет ЧГУ им. И.Н. Ульянова, получил степень магистра техники и технологии по направлению «Электроэнергетика и электротехника». Инженер 2 категории отдела РЗА станционного оборудования ООО НПП «ЭКРА», аспирант ЧГУ им. И.Н. Ульянова по профилю 05.14.02 «Электрические станции и электроэнергетические системы».



Солдатов Александр Вячеславович²

Окончил в 2006 г. электроэнергетический факультет ЧГУ им. И.Н. Ульянова. Заместитель заведующего отделом РЗА станционного оборудования ООО НПП «ЭКРА».

¹ Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова

² ООО НПП «ЭКРА»